9-12-15

§2.2 Χαρακτηριστική κατεύθυνση, Χαρακτηριστική καμπύλη

Έστω, $Lu = \underbrace{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}}_{\text{πρωτεύον μέρος του } L} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u$

τότε το πολυώνυμο $p(\xi)=p(\xi_1,\xi_2) := a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο του L** και μια μη μηδενική λύση $\xi=(\xi_1,\xi_2)\neq(0,0)$ της $p(\xi_1,\xi_2)=0$ ονομάζεται **χαρακτηριστική κατεύθυνση του L**.

Μια καμπύλη (λεία) λέγεται **χαρακτηριστική καμπύλη του L** αν το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε σημείο (x,y) της καμπύλης είναι χαρακτηριστική κατεύθυνση του L (αν η καμπύλη, δηλαδή το εφαπτόμενο διάνυσμα της είναι κάθετη στη χαρακτηριστική κατεύθυνση)

Παραδείγματα

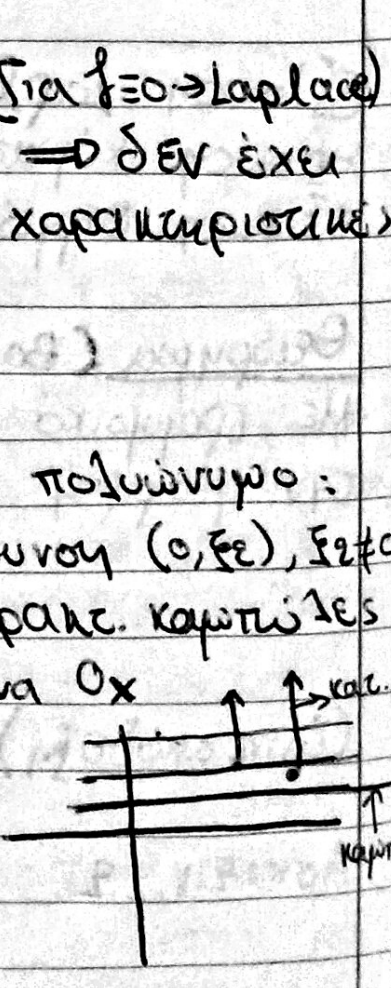
1) Εξίσωση Poisson (ελλειπτική)

$u_{xx}+u_{yy} = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \Delta u = f(x,y)$ (Για $f\equiv 0 \to$ Laplace)

Χαρακ. πολυώνυμο: $p(\xi)=p(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^2+\xi_2^2 \Rightarrow$ δεν έχει χαρακτηρ. κατεύθυνση $\Rightarrow$ δεν υπάρχουν χαρακτηριστικές καμπύλες

2) Εξίσωση θερμότητας (παραβολική)

$u_t - k u_{xx} = f(x,t)$, $(k>0) \Rightarrow$ χαρκ. πολυώνυμο: $p(\xi)=p(\xi_1,\xi_2)=-k\xi_1^2 \Rightarrow$ χαρακτ. κατεύθυνση $(0,\xi_2)$, $\xi_2\neq 0$ $\Rightarrow$ $(0,1)$ μια χαρακτ. κατεύθυνση $\Rightarrow$ χαρακτ. καμπύλες είναι οι ευθείες παράλληλες στον άξονα Ox



3) Κυματική εξίσωση (υπερβολική)

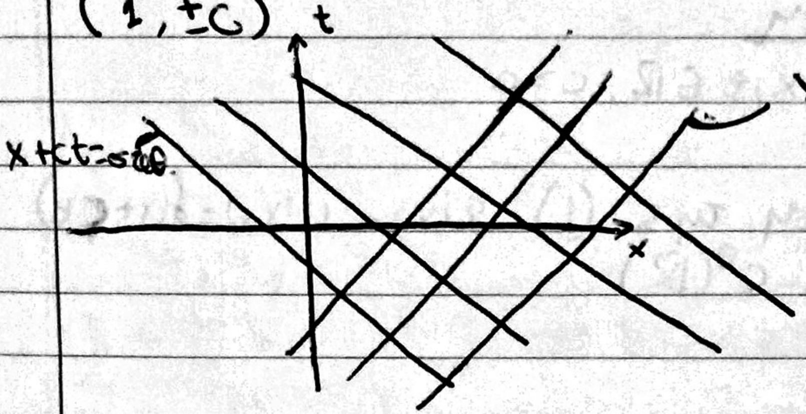
$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \Rightarrow$ χαρακτ. πολυώνυμο: $(c>0)$

$p(\xi_1,\xi_2) = \xi_2^2 - c^2\xi_1^2 \Rightarrow$ Χαρακτ. κατευθ. $(p(\xi)=0)$

$\xi_2^2 = c^2\xi_1^2 \Leftrightarrow \xi_2 = \pm c\xi_1$, δηλαδή $(\xi_1, \pm c\xi_1)$, $\xi_1 \neq 0$

ή πιο απλά $(1 \pm c)$, δηλαδή έχουμε δυο χαρακτ. κατευθύνσεις και άρα δυο <u>χαρακτ. καμπύλες</u> $\Rightarrow$

$x+ct=$ σταθ, $x-ct=$ σταθ. που είναι κάθετες στα $(1, \pm c)$



<u>Παρατήρηση</u>: Για ΜΔΕ πρώτης τάξης γραμμικές:

<u>$a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u = f(x,y)$</u>

$= Lu$ (γραμμ. διαφορικός τελεστής $1^{ης}$ τάξης)

με πρωτεύον τμήμα $a_1 u_x + a_2 u_y = (a_1\partial x + a_2\partial y)u$

χαρακτ. πολυώνυμο: $p(\xi_1,\xi_2) = a_1\xi_1 + a_2\xi_2$

χαρακτ. κατεύθυνση: $\xi \neq (0,0)$: $(a_1,a_2)(\xi_1,\xi_2)=0 \Leftrightarrow (p(\xi_1,\xi_2)=0)$

χαρακτ. καμπύλες: αυτές των οποίων το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι $\parallel (a_1,a_2)$ (*) $(\Leftrightarrow$ εφαπτ. διαν $\perp (\xi_1,\xi_2))$

$\Rightarrow$ π.χ για την εξίσωση μεταφοράς: $u_t + cu_x = 0 \Rightarrow$

χαρακτ. καμπύλη: $t - cx =$ σταθ. $\Leftrightarrow x - ct =$ σταθ.

Επίσης, (*) $\Rightarrow$ Αν $(x(s), y(s))$ η παραμετρικοποίηση της χαρακτ. καμπύλης τότε $(\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = \lambda(s)(a_1(x(s),y(s)), a_2(x(s),y(s)))$

$\Rightarrow$ (αναπαραμετρικοποίηση) $(\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (a_1(..), a_2(..))$ (από τις $1^{ης}$ τάξης)

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, (για $Lu = a_{11}u_{xx} + \dots$)

$\Rightarrow$ χαρακτ. $p(\xi) = \xi^T A \xi \xrightarrow[A \text{ συμμετρικός}]{} \exists$ ορθογώνιος $\theta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Theta^{-1} A \Theta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ και οι στήλες του Θ είναι τα ιδιοδιανύσματα για λ_1, λ_2

$\xRightarrow{\xi = \Theta \zeta} p(\Theta \zeta) = \ldots = \zeta^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \zeta = \lambda_1 \zeta_1^2 + \lambda_2 \zeta_2^2 \Rightarrow$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$: ελλειπτικός

$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$: υπερβολικός

$\lambda_1 > 0 = \lambda_2$: παραβολικός

§2.3 | Κυματική εξίσωση

(1): $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $x, t \in \mathbb{R}$, $c > 0$

Πρόταση 1: Γενική λύση της (1) είναι $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$, f, g είναι $C^2(\mathbb{R})$

Απόδειξη

1ος τρόπος

$(1) \Leftrightarrow (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) u = 0 \overset{u \in C^2}{\Leftrightarrow} (\partial_t - c\partial_x) \underbrace{(\partial_t + c\partial_x) u}_{:= v} = 0$

$\xRightarrow{\text{Εξίσωση μεταφοράς}} \underbrace{v(x,t)}_{= (\partial_t + c\partial_x) u(x,t)} = h(x+ct)$

Η $\partial_t u + c \partial_x u = h(x+ct)$ είναι μη ομογενής εξίσωση 1ης τάξης, η οποία έχει $\overset{\text{γενική}}{\text{λύση}}$ $u(x,t) = g(x-ct) + u_2(x,t)$ όπου $u_2(x,t) = f(x+ct)$, με $f' = \frac{1}{2c} h$ η ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης.

2ος τρόπος (αλλαγή μεταβλητών, μέθοδος χαρακτηριστικών)

$\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$

$U(\xi, \eta) := u(x,t) \Rightarrow \partial_x u = \partial_\xi U + \partial_\eta U$

$\partial_t u = \partial_\xi U c - \partial_\eta U c$

$\Rightarrow \partial_t u - c \partial_x u = -2c \partial_\eta U$, $\partial_t u + c \partial_x u = 2c \partial_\xi U \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$(-2c \partial_\eta)(2c \partial_\xi) U = 0 \Leftrightarrow U_{\eta\xi} = 0 \Leftrightarrow \partial_\eta \partial_\xi U = 0 \Rightarrow$

$\partial_\xi U(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi) \Rightarrow U(\xi, \eta) = \underbrace{\int \tilde{f}(\xi) d\xi}_{= f(\xi)} + g(\eta) \Rightarrow u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{ στο } \mathbb{R}\times(0,\infty) & (1.1) \\ \begin{cases} u(\cdot,0)=\varphi \\ u_t(\cdot,0)=\psi \end{cases}, \text{ στο } \mathbb{R}, \ \varphi\in C^2(\mathbb{R}), \psi\in C^1(\mathbb{R}) & (1.2) \end{cases}$$

Πρόταση: Υπάρχει μοναδική λύση $u\in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ της (1.1), (1.2) και $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right)+$
$+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)d\tau$ (τύπος d'Alembert)

Απόδειξη

Η γενική μορφή της (1.1) είδαμε ότι είναι
$u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct) \Rightarrow u(x,0)=f(x)+g(x) \stackrel{(1.2)}{=} \varphi(x)$
$\Rightarrow f'(x)+g'(x)=\varphi'(x)$ (+)

$\partial_t u(x,t)=f'(x+ct)\cdot c - g'(x-ct)\cdot c \Rightarrow$
$\partial_t u(x,0)=f'(x)\cdot c - g'(x)\cdot c \stackrel{(1.2)}{=} \psi(x)$ (++)

(+), (++) $\Rightarrow \begin{cases} f'(x)=\frac{1}{2}\left(\varphi'(x)+\frac{\psi(x)}{c}\right) \\ g'(x)=\frac{1}{2}\left(\varphi'(x)-\frac{\psi(x)}{c}\right)\end{cases} \xRightarrow{\text{ολοκλήρωση}}$

$\begin{cases} f(s)=\frac{1}{2}\varphi(s)+\frac{1}{2c}\int_0^s\psi(\tau)d\tau+a \\ g(s)=\frac{1}{2}\varphi(s)-\frac{1}{2c}\int_0^s\psi(\tau)d\tau+b \end{cases}$ $\stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(s)+g(s)=\varphi(s)+a+b=\varphi(s)$
$\Rightarrow a+b=0$

$\Rightarrow u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right]$
$\cancel{+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right]}+\frac{1}{2c}\underbrace{\left[\int_0^{x+ct}\psi(\tau)d\tau-\int_0^{x-ct}\psi(\tau)d\tau\right]}$
$=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\tau)d\tau$

2ος τρόπος

$\begin{cases}(v_1)_t - c(v_1)_x=0 \\ (v_2)_t+c(v_2)_x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v_1(x,t)\stackrel{5}{=}v_1(ct+x,0) \\ v_2(x,t)\stackrel{6}{=}v_2(x-ct,0)\end{matrix}$

όπου $V(x,t) = \begin{pmatrix} V_1(x,t) \\ V_2(x,t) \end{pmatrix} = B^{-1} U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/c & 1 \\ -1/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_t(x,t) \\ U_x(x,t) \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} U_t + U_x \\ -\frac{1}{c} U_t + U_x \end{pmatrix} \Rightarrow V(y,0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\psi(y) + \varphi'(y) \\ -\frac{1}{c}\psi(y) + \varphi'(y) \end{pmatrix} \xRightarrow{(5),(6)}$

$V(x,t) = \begin{pmatrix} V_1(x,t) \\ V_2(x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\psi(x+ct) + \varphi'(x+ct) \\ -\frac{1}{c}\psi(x-ct) + \varphi'(x+ct) \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\underbrace{U(x,t)}_{= \begin{pmatrix} \partial_t U(x,t) \\ \partial_x U(x,t) \end{pmatrix}} = B\,V(x,t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c & -c \\ 1 & 1 \end{pmatrix} V(x,t) =$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi(x+ct) + c\varphi'(x+ct) + \psi(x-ct) - c\varphi'(x-ct) \\ \frac{1}{c}\psi(x+ct) + \varphi'(x-ct) - \frac{1}{c}\psi(x-ct) + \varphi'(x+ct) \end{pmatrix}$

$\xRightarrow{\text{ολοκλήρωση}} U(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\tau)\,d\tau + h(x)$

και την 2η: $U(x,t) = - - - - \quad + \bar{h}(t)$

$\Rightarrow h(x) = \bar{h}(t) \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c \xRightarrow{U(x,0)=\varphi(x)} c = 0$

[Για την μοναδικότητα: προκύπτει άμεσα αφού αναγκαία από τα δεδομένα προκύπτει ότι η $u(x,t)$ ισούται με μια δοσμένη συνάρτηση]

[Ασκ: 2.17, 2.18]